Métodos de integración

Integración por partes

De la derivada del producto de dos funciones obtenemos la fórmula de la derivación por partes.

$(u.v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ que se puede escribir $d(u.v) = du \cdot v + u \cdot dv$

Tomando integrales en los dos miembros de la igualdad tendremos:

$$\int d(u.v) = \int du \cdot v + \int u \cdot dv$$

Teniendo en cuenta que la integral de la derivada de una función es la misma función y utilizando la notación de integral tendremos:

$$u \cdot v = \int du \cdot v + \int u \cdot dv$$

Despejando llegamos a la fórmula de **integración por partes**

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

que permite calcular la **integral de un producto** de dos funciones

Seleccionamos *u* de manera que se simplifique al derivar, y *dv* que sea fácilmente integrable. En caso de reiterar el método, elegimos los mismos tipos de funciones en cada paso.

Teniendo en cuenta que dv = v' y que du = u' La fórmula también se puede escribir:

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Ejemplos

$$\int x \cos x \, dx$$

$$u = x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 1$$

$$v' = \cos x \xrightarrow{\text{integrar}} v = \operatorname{sen} x$$

$$\int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

Si al **integrar por partes** tenemos un polinomio de grado **n**, lo tomamos como **u** y se repite el proceso **n** veces.

$$\int x^3 e^x dx$$

$$u = x^3 \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 3x^2$$

$$v' = e^x \xrightarrow{\text{integrar}} v = e^x$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx$$

$$u = x^2 \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 2x$$

$$v' = e^x \xrightarrow{\text{integrar}} v = e^x$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - 2\int x e^x dx\right) =$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x e^x dx$$

$$u = x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 1$$

$$v' = e^x \xrightarrow{\text{integrar}} v = e^x$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\left(x e^x - \int e^x dx\right) =$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C = e^x\left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) + C$$

Si tenemos una **integral** con sólo un logaritmo o un "arco", **integramos por partes** tomando: ***v' = 1***.

$$\int \text{arc cotg}\, x\, dx$$

$$u = \text{arc cotg}\, x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$v' = 1 \xrightarrow{\text{integrar}} v = x$$

$$\int \text{arc cotg}\, x\, dx = x\,\text{arc cotg}\, x + \int \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= x\,\text{arc cotg}\, x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

Si al **integrar por partes** aparece en el segundo miembro la integral que hay que calcular, se resuelve como una ecuación.

$$\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x\, dx$$

$$u = e^{3x} \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 3e^{3x}$$

$$v' = \operatorname{sen} 2x \xrightarrow{\text{integrar}} v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x\,dx$$

$$u = e^{3x} \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 3e^{3x}$$

$$v' = \cos 2x \xrightarrow{\text{integrar}} v = \frac{1}{2}\text{sen}\,2x$$

$$\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{3x}\,\text{sen}\,2x - \frac{3}{2}\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx\right)$$

$$\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\,\text{sen}\,2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx$$

$$\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx + \frac{9}{4}\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\,\text{sen}\,2x$$

$$\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx = \frac{4}{13}\left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\,\text{sen}\,2x\right) + C$$

$$\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx = \frac{1}{13}e^{3x}\left(-2\cos 2x + 3\,\text{sen}\,2x\right) + C$$

Integrales racionales

En las **integrales racionales** suponemos que el grado del numerador es menor que del denominador, si no fuera así se dividiría (recordar que D=d·c+r , luego dividiendo todo por **d** resulta $\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$)

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

Una vez que sabemos que el denominador tiene mayor grado que numerador, descomponemos el denominador en factores.

Dependiendo de las raíces del denominador nos encontramos con los siguientes **tipos de integrales racionales**:

1º Integrales racionales con raíces reales simples

La fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ puede escribirse así:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-c)}\cdots$$

Los coeficientes A, B y C son números que se obtienen efectuando la suma e identificando coeficientes o dando valores a x.

Ejemplo

$$\int \frac{3x^3+5x}{x^2-x-2}\,dx$$

$$3x^3+5x \quad \left|\underline{x^2-x-2}\right.$$

$$\boxed{14x+6} \qquad 3x+3$$

$$\int \frac{3x^3+5x}{x^2-x-2}\,dx = \int\left(3x+3+\frac{14x+6}{x^2-x-2}\right)dx$$

Descomponemos en factores $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

$$\frac{14x+6}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

Se efectúa la suma:

$$\frac{14x+6}{x^2-x-2} = \frac{A(x+1)}{x-2} + \frac{B(x-2)}{x+1}$$

Como las dos fracciones tienen el mismo denominador, los numeradores han de ser iguales:

$$14x+6 = A(x+1)+B(x-2)$$

Calculamos los coeficientes de A, B y C dando a la x los valores que anulan al denominador.

$$x=-1 \qquad -8=-3B \qquad B=\frac{8}{3}$$

$$x=2 \qquad 34=3A \qquad A=\frac{34}{3}$$

Resulta $\int \left(3x+3+\frac{14x+6}{x^2-x-2}\right) = \int(3x+3)dx + \int \frac{14x+6}{x^2-x-2}\,dx =$

$$\int (3x+3)dx + \int \frac{34/3}{x-2}\,dx + \int \frac{8/3}{x+1}\,dx$$

Luego

$$\int\left(3x+3+\frac{14x+6}{x^2-x-2}\right)dx = \frac{3}{2}x^2+3x+\frac{34}{3}\ln(x-2)+\frac{8}{3}\ln(x+1) + C$$

2º Integrales racionales con raíces reales múltiples

En el caso de que aparezcan raíces dobles, triples, etc., la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ puede escribirse así:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

Ejemplo

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$$

$$x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$$

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$3x+5=A(x-1)^2+B(x^2-1)+C(x+1)$$

Para calcular los valores de A, B y C, damos a x los valores que anulan al denominador y otro más.

$x=1 \qquad 8=2C \qquad C=4$

$x=-1 \qquad 2=4A \qquad A=\frac{1}{2}$

$x=0 \qquad 5=A-B+C \qquad B=-\frac{1}{2}$

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}+4\int \frac{dx}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{4}{x-1}+C$$

3º Integrales racionales con raíces complejas simples

La fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ puede escribirse así:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

Esta **integral** se descompone en una de tipo **lograritmico** y otra de tipo **arcotangente**.

Ejemplo

$$\int \frac{2x^2-3x+2}{x^3+x}dx$$

$$\frac{2x^2-3x+2}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$$

$$2x^2-3x+2=A(x^2+1)+(Mx+N)x$$

Hallamos los coeficientes realizando las operaciones e igualando coeficientes:

$$2x^2 - 3x + 2 = (A + M) + Nx + A$$

$$2 = A + M \qquad M = 0$$

$$-3 = N$$

$$2 = A$$

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^3 + x} dx = 2\int \frac{dx}{x} - 3\int \frac{dx}{x^2 + 1} =$$

$$= 2\ln x - 3\operatorname{arc\,tg} x + C$$

Integrales por sustitución o cambio de variable

El **método de integración por sustitución o cambio de variable** se basa en la derivada de la función compuesta.

$$\int f'(u) \cdot u' \, dx = F(u) + C$$

Para **cambiar de variable** identificamos una parte de lo que se va a integrar con una nueva **variable t**, de modo que se obtenga una **integral** más sencilla.

Pasos para integrar por cambio de variable

$$\int f'(u) \cdot u' \, dx$$

1º Se hace el **cambio de variable** y se diferencia en los dos términos:

$$t = u$$

$$dt = u' \, dx$$

Se despeja **u** y **dx**, sustituyendo en la integral:

$$\int f'(t) \cdot u' \frac{dt}{u'} = \int f'(t) \, dt$$

2º Si la **integral** resultante es más sencilla, integramos:

$$\int f'(t) \, dt = f(t) + C$$

3º Se vuelve a la **variable inical**:

$$f(t) + C = f(u) + C$$

Ejemplo

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1 + 2x}} dx$$

$$1+2x=t^3 \qquad x=\frac{t^3-1}{2}$$

$$2\,dx=3t^2\,dt \qquad dx=\frac{3t^2\,dt}{2}$$

$$\int \frac{\left(\frac{t^3-1}{2}\right)^2}{t}\,\frac{3t^2}{2}\,dt=\frac{3}{2}\int\left(\frac{t^6-2t^3+1}{4}\right)\cdot t\,dt=\frac{3}{8}\int\left(t^7-2t^4+t\right)dt=$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{t^8}{8}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^2}{2}\right)+C$$

$$t=\sqrt[3]{1+2x}$$

$$\frac{3}{64}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^8-\frac{3}{20}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^5+\frac{3}{16}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^2+C$$

Cambios de variables usuales

1. $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx \qquad x=a\ \text{sen t}$

2. $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx \qquad x=a\ \text{tg}\,t$

3. $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx \qquad x=a\ \text{sec t}$

4. $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+\text{d}}}\right)dx \qquad t=\frac{ax+b}{cx-d}$

5. En las **funciones racionales de radicales con distintos índices**, de un mismo radicando lineal ax + b, el **cambio de variable** es **t** elevado al mínimo común múltiplo de los índices.

6. Si R(sen x, cox x)es par:

Cambio	sen x	cos x	tg x	dx
$t=\text{tg}\,x$	$\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$	t	$\frac{dt}{1+t^2}$

7. Si R(sen x, cox x) no es par:

Cambio	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	dx
$t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$	$\dfrac{2t}{1+t^2}$	$\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$	$\dfrac{2t}{1-t^2}$	$\dfrac{2\,dt}{1+t^2}$

Ejemplos

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\,dx$$

$x = \operatorname{sen} t$

$dx = \cos t\,dt$

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^4 t}{\sqrt{(1-\operatorname{sen}^2 t)^2}}\cos t\,dt = \int \frac{(1-\cos^2 t)^2}{\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \int \frac{1-2\cos^2 t+\cos^4 t}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{dt}{\cos^2 t} - 2\int dt + \int \cos^2 t\,dx =$$

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t} - 2\int dt + \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dx =$$

$$= \operatorname{tg} t - 2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + C = \operatorname{tg} t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{3}{2}t + C$$

$x = \operatorname{sen} t$ $\qquad$ $t = \operatorname{arc\,sen} x$

$$\operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t\cdot\cos t = 2\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x)\,\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = 2x\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1-\left[\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x)\right]^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\,dx = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sen} x) + x\cdot\sqrt{1-x^2} - \frac{3}{2}\operatorname{arc\,sen} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$$

$\operatorname{tg} x = t$ $\qquad$ $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+1+t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \int \frac{dt}{2\left[1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right]} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{ arc tg}\frac{t}{\left(\sqrt{2}\right)} + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{arc tg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\text{tg } x\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos^2 x}}$$

$\text{tg }\frac{x}{2} = t$ $\qquad\qquad$ $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\sqrt{\frac{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)+\left(1-t^2\right)^2}{\left(1+t^2\right)^2}}} = 2\int \frac{dt}{\sqrt{2-2t^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\text{arc sen}\,t + C = \frac{2}{\sqrt{2}}\text{arc sen}\left(\text{tg}\frac{x}{2}\right) + C$$

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$$

$x = t^6$

$dx = 6t^5\,dt$

$$\int \frac{1-t^3}{t^2}\,6t^5\,dt = 6\int \left(1-t^3\right)t^3 dt = 6\int \left(t^3-t^6\right)dt = \frac{3}{2}t^4 - \frac{6}{7}t^7 + C$$

$t = \sqrt[6]{x}$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4} - \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$$

$x = 2\sec t$ $\qquad\qquad$ $dx = 2\sec t\,\text{tg}\,t\,dt$

$$\int \frac{2\sec t}{\sqrt{4\sec^2 t - 4}}\,2\sec t\,\text{tg}\,t\,dt =$$

$$= \int \frac{2\sec t}{2\operatorname{tg} t}\, 2\sec t \operatorname{tg} t\, dt = 2\int \sec^2 t\, dt = 2\operatorname{tg} t + C$$

$$\frac{x}{2} = \sec t \qquad\qquad t = \operatorname{arc\,sec}\frac{x}{2}$$

$$2\operatorname{tg} t + C = 2\sqrt{\sec^2\left(\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{2}\right) - 1} + C =$$

$$= 2\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} + C = \sqrt{x^2 - 4} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 + x^2}}$$

$$x = 2\operatorname{tg} t$$

$$dx = 2\sec^2 t\, dt$$

$$\int \frac{2\sec^2 t}{4\operatorname{tg}^2 t\sqrt{4 + 4\operatorname{tg}^2 t}}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 t}{\operatorname{tg}^2 t\sqrt{4\left(1 + \operatorname{tg}^2 t\right)}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 t}{\operatorname{tg}^2 t\; 2\sec t}\, dt = \frac{1}{4}\int \frac{\sec t}{\operatorname{tg}^2 t}\, dt = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos t\, \operatorname{sen}^{-2} t\, dt = = -\frac{1}{4}\int \cos t\, \operatorname{sen}^{-2} t\, (-1)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1} t + C = \frac{1}{4\operatorname{sen} t} + C$$

$$x = 2\, tg\, t \qquad \frac{x}{2} = tg\, t \qquad t = arc\, tg\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 + x^2}} = \frac{1}{4\operatorname{sen}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]} + C$$

Integrales trigonométricas

Potencias pares de sen x o cos x

Se aplica el **seno y coseno del ángulo mitad**:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\int \cos^2 x\,dx$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \left(\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\right)^2 dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C$$

Potencias impares de sen x o cos x

Se relacionan el seno y el coseno mediante la fórmula fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x\ \operatorname{sen} x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx =$$

$$\int \left(\text{sen } x - \cos^2 x \ \text{sen } x\right) dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$\int \cos^3 x \, dx$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \ \cos x \, dx = \int \left(1 - \text{sen}^2 x\right) \cos x \, dx =$$

$$\int \left(\cos x - \text{sen}^2 x \cos x\right) dx = \int \cos x \, dx - \int \text{sen}^2 x \cos x dx =$$

$$\int \cos x \, dx - \frac{1}{3}\int 3\,\text{sen}^2 x \cos x dx = \text{sen } x - \frac{1}{3}\text{sen}^3 x + C$$

$$\int \cos^5 x \ dx$$

$$\int \cos^5 x \ dx = \int \cos^4 x \cos x \, dx = \int \left(1 - sen^2 x\right)^2 \cos x \, dx =$$

$$= \int \cos x \, dx - 2\int sen^2 x \ \cos x \, dx + \int sen^4 x \cos x \, dx =$$

$$= sen\, x - \frac{2}{3} sen^3 x + \frac{1}{5} sen^5 x \ + \ C$$

Con exponente par e impar

El exponente impar se transforma en uno par y otro impar.

$$\int \text{sen}^5 x \ \cos^2 x \, dx$$

$$\int sen^5 x \ \cos^2 x \, dx = \int sen\, x \ \ sen^4 x \ \cos^2 x \, dx =$$

$$= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 sen\, x \ \ \cos^2 x \, dx =$$

$$= \int \left(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\right) \ sen\, x \ \ \cos^2 x dx$$

$$= \left(\int \cos^2 x \ \ sen\, x \ - 2\cos^4 x \ \ sen\, x + \cos^6 x \ sen\, x\right) dx$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x \ + \ C$$

También se puede hacer por el **cambio de variable t = sen x** o **t = cos x**

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos x dx$$

$\operatorname{sen} x = t$

$\cos x dx = dt \qquad dx = \frac{dt}{\cos x}$

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos x dx = \int t^4 \cos x \frac{dt}{\cos x} = = \int t^4 dt = t^5 + C = \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$$

$$\int \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x dx$$

$\cos x = t$

$-\operatorname{sen} x dx = dt \qquad dx = -\frac{dt}{\operatorname{sen} x}$

$$\int \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x dx = -\int t^2 \operatorname{sen}^3 x \frac{dt}{\operatorname{sen} x} = -\int t^2 \operatorname{sen}^2 x\, dt =$$

$$= -\int t^2 \left(1\text{-}\cos^2 x\right) dt == -\int t^2 \left(1\text{-}t^2\right) dt = -\int \left(t^2 - t^4\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x} dx$$

$-\operatorname{sen} x\, dx = dt \qquad dx = -\frac{dt}{\operatorname{sen} x}$

$$-\int \frac{\operatorname{sen} x \left(1 - t^2\right)}{t} \frac{dt}{\operatorname{sen} x} = -\int \frac{1 - t^2}{t} dt = -\int \frac{dt}{t} + \int t\, dt =$$

$$-\ln t + \frac{1}{2}t^2 + C = -\ln\left(\cos x\right) + \frac{1}{2}\cos^2 x + C$$

Productos de tipo sen(nx) · cos(mx)

Se transforman los productos en sumas:

$$\operatorname{sen} A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(A + B\right) + \operatorname{sen}\left(A - B\right)\right]$$

$$\cos A \cdot \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(A + B\right) - \operatorname{sen}\left(A - B\right)\right]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$sen\, A \cdot sen\, B = -\frac{1}{2}\left[\cos(A+B) - \cos(A-B)\right]$$

$$\int \text{sen } 3x \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\text{sen } 5x + \text{sen } x)\, dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 5x}{5} - \cos x\right) + C$$

$$\int \cos 5x \, \text{sen} 3x \, dx$$

$$\int \cos 5x \;\; sen 3x \, dx = \frac{1}{2}\int (sen\, 8x - sen\, 2x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x \; + \; C$$

$$\int \cos 4x \; \cos 2x \, dx$$

$$\int \cos 4x \; \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 6x + \cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{12} sen\, 6x + \frac{1}{4} sen 2x \; + \; C$$

$$\int sen 3x \;\; sen 7x \, dx$$

$$\int sen 3x \;\; sen 7x \, dx = -\frac{1}{2}\int \left[\cos 10x - \cos(-4x)\right] dx =$$

cos (-4x) = cos 4x

$$-\frac{1}{2}\int \cos 10x \, dx + \frac{1}{2}\int \cos \; 4x \, dx = -\frac{1}{20} sen 10x + \frac{1}{8} sen\, 4x \; + \; C$$